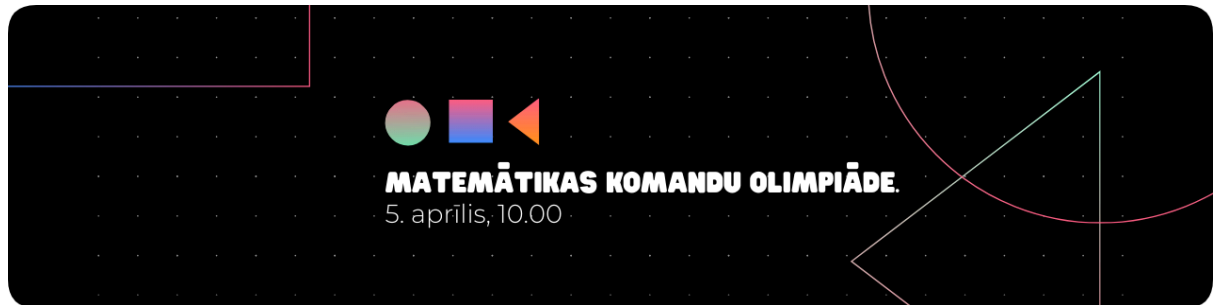




MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE

5. aprīlis, 2025

9. – 10. klašu grupa Uzdevumu komplekts

Risinot olimpiādes uzdevumus, ņem vērā:

- Katrā jautājumā parādi ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājieni.
- Gan tīrrakstā, gan melnrakstā uz katras lapas uzrakstiet komandas nosaukumu un klašu grupu.
- Tīrrakstā iekļaujiet arī atbildes paskaidrojumu/pierādījumu un īsu domu gājieni.
- Uzdevuma nosaukumam un jautājuma numuriem ir jābūt skaidri redzamiem.
- Olimpiādes uzdevumu risināšanai ir atvēlētas 3 stundas un 30 minūtes.
- 30 minūtes pirms olimpiādes beigām viens dalībnieks no katras komandas piedalīsies *Speed math* daļā. Vairāk par to jums pastāstīs brīvprātīgais.
- Ja pamanāt kļūdu uzdevumu komplektā, ziņojiet par to brīvprātīgajam jūsu stāvā.
- Izmantot neatļautas palīgierīces, vai sazināties ar citām komandām ir aizliegts.
- Uzdevumu komplekti netiek vērtēti, tie var paliek pie jums.
- Maksimālais iegūstamais punktu skaits – 61 punkts.
- Atceries, ka:

$\pi \approx 3,14$	$3,15 > \pi > 3,14$	$2025 = 45^2$	$1\text{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.2958^\circ$
--------------------	---------------------	---------------	---

Lai veicas!

ĶĀ “GAMBLE – OT” PROFESIONĀLI?

(20 punkti)

Tā kā azartspēles lielākoties balstās uz varbūtību teoriju, arī šis uzdevums ir saistīts ar to.

Notikuma A varbūtību apzīmējam ar $P(A)$ un aprēķina pēc formulas:

$P(A) = \frac{n}{m}$, kur n ir labvēlīgo notikumu skaits, m ir visu iespējamo notikumu skaits.

Matemātiskā cerība, jeb sagaidāmā vērtība kādam nejaušam mainīgajam ir definēta kā summa visu iespējamo mainīgo vērtībām reizināta ar tās vērtības varbūtību.

$E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$, kur p ir vērtības varbūtība, un x ir vērtība.

Piemēram, metot “godīgu” kauliņu ar 6 skaldnēm, matemātiskā cerība tiek aprēķināta šādi:

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5$$

jo katrai iespējamai uzmosto punktu skaita vērtībai varbūtība ir $\frac{1}{6}$.

Pieņem, ka visi skaitļi uzdevumā ir reāli. Katrā uzdevumā parādi ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājienu.

1) Spēlējot Zoli, katram spēlētājam ir 4 kārtis. Čuhanam ir 4 trumpji un abiem viņa pretiniekiem kopā ir 4 trumpji. Kāda ir varbūtība, ka:

- (1) Katram ir tieši 2 trumpji?
- (2) Vienam ir tieši 3 trumpji bet otram - 1 trumpis?
- (3) Vienam ir visi 4 trumpji bet otram nav neviena?

(1 punkts par katru apakšpunktu)

2) Tabula ar izmēru $3 \cdot 3$ ir aizpildīta ar skaitļiem no 1 līdz 9, skaitļi neatkārtojas. Jums ir 4 kartītes, uz katras kartītes ir uzrakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 9, un skaitļi uz kartītēm neatkārtojas. Jūs uzvarat loterijā, ja kādā tabulas rindā, kolonnā vai diagonālē visi skaitļi sakrīt ar jebkuriem 3 uz kartītēm esošajiem skaitļiem. Kāda ir varbūtība uzvarēt? **(2 punkti)**

3) Klasē ir 25 skolēni. Varbūtība, ka divi dažādi, nejauši izvēlēti skolēni no klases ir zēni, ir $\frac{3}{25}$. Cik meitenes ir klasē? Pieņem, ka klasē ir tikai zēni un meitenes. **(2 punkti)**

4) Olimpiādē “Atvērtā Kopa” piedalījās 2025 dalībnieki. Organizatoriem katram no viņiem bija jāiedod kartīte ar savu vārdu, taču visas kartītes tika sajauktas, un katram tika iedota nejauša kartīte. Atrodiet to spēlētāju skaita matemātisko cerību, kuri saņēma kartīti ar savu vārdu! Pieņem, ka visiem spēlētājiem ir atšķirīgi vārdi. **(3 punkti)**

5) Petrs spēlē azartspēli “Lielie dalītāji”, kurā viņam jāizvēlas naturāls skaitlis n , kur $2000 \leq n \leq 2025$. Lai uzvarētu, Petram nejauši jāizvēlās n dalītājs x un, ja x ir ≥ 45 , Petrs uzvar. Kuru skaitli Petram vajadzētu izvēlēties, lai uzvaras varbūtība būtu pēc iespējas lielāka? Kāda ir šī varbūtība? **(2 punkti un 1 punkts)**

6) Uz žāvētāja nejaušā secībā izliktas žāvēt 2025 zeķes. Starp tām ir divas Aleksandra mīļākās zeķes. Aleksandrs neredz zeķes un ņem tās nejaušā secībā. Atrodiet matemātisko cerību to zeķu skaitam, ko viņam vajadzēs noņemt līdz būs noņēmis abas savas mīļākās zeķes. **(4 punkti)**

7) Rindā viens aiz otra stāv n dažāda auguma cilvēki. Skatoties no rindas sākuma, katrs cilvēks ir redzams ja viņam priekšā nestāv kāds garāks. Kāda ir matemātiskā cerība redzamo cilvēku skaitam? (rezultāts var būt arī daļskaitlis) **(3 punkti)**

SIZE MATTERS

(22 punkti)

Dzīvē izmēram bieži vien ir nozīme – veikalā es neizvēlētos mazāku produktu, ja par tādu pašu cenu var iegādāties lielāku. Šajā uzdevumā Tev jānosaka, kura no dotajām izteiksmēm ir lielāka.

Izteiksmes var būt arī vienādas. Pieņem, ka visi skaitļi uzdevumā ir reāli. Atceries katrā jautājumā parādīt ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājienu.

n faktoriāls, jeb $n!$ tiek definēts kā visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājums, proti, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.

1) Kurš ir lielāks: 2024^{2024} vai 2025^{2023} ? (3 punkti)

2) Kurš ir lielāks: 31^{11} vai 17^{14} ? (2 punkti)

3) Kurš ir lielāks: $50!$ vai 50^{25} ? (2 punkts)

4) Kurš ir lielāks: $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}$ vai $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}$, $x > 3$? (1 punkts)

5) Kurš ir lielāks: $(2n)!$ vai $(n + 0.5)^{2n}$, kur n ir naturāls skaitlis? (3 punkti)

6) Pieņemot, ka n ir naturāls skaitlis, kurš ir lielāks: $(1 + \frac{1}{1}) \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n})$ vai n ? (1 punkts)

7) Kurš ir lielāks: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2024}{2025}$ vai $\frac{1}{45}$? (3 punkti)

8) Kurš ir lielāks: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$ vai 44? (2 punkti)

9) Kurš ir lielāks: $\sin(3 \text{ rad})$ vai $\sin(3^\circ)$? (2 punkti)

10) Kurš ir lielāks $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{2025^3-1}{2025^3+1}$ vai $\frac{2}{3}$? (3 punkti)

OPTIMAL PATH

(19 punkti)

Dzīvē, lai izvairītos no liekām vai ilgām darbībām, bieži jāizvēlas optimālais variants. Šajā uzdevumā vajadzēs noteikt optimālo veidu ģeometrijā. Pieņem, ka visi skaitļi ir reāli. Atceries katrā jautājumā parādīt ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājieni.

- 1)** Kāds ir minimālais garums līknei (ne obligāti taisnei), kas sadala vienādmalu trijstūri 2 vienādi lielās daļās, ja tās abi gali atrodas uz dažādām trijstūra malām? **(4 punkti)**
- 2)** Attālums starp Ogrī un Rīgu ir 100km. Zināms, ka Ogrē dzīvo 50 tūkstoši skolēnu, bet Rīgā – 100 tūkstoši. Kur vajadzētu uzbūvēt skolu, lai kopējais attālums, kas skolēniem no abām pilsētām jāmēra uz skolu, būtu minimāls? **(1 punkts)**
- 3)** Izliektā četrstūrī atrodiet punktu, kuram attālumu summa līdz virsotnēm ir minimāla. **(2 punkti)**
- 4)** No visiem paralelogramiem ar laukumu 2025 atrodiet tādu, kura garākā diagonāle ir minimāla. Kāds ir šīs diagonāles garums? **(3 punkti)**
- 5)** Dots trijstūris ar perimetru 2025. Kāds varētu būt šī trijstūra maksimālais laukums? **(4 punkti)**
- 6)** Atrodiet minimumu funkcijai $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$, kur a, b un c ir pozitīvi reāli skaitļi. **(2 punkti)**
- 7)** Vai ir iespējams Dekarta koordinātu plaknē uzzīmēt rīņķa līniju ar racionālu rādiusu, lai uz tās būtu tieši 2025 racionālie punkti? Punktu sauc par racionālu punktu, ja abas tā koordinātas ir racionālas. **(3 punkti)**