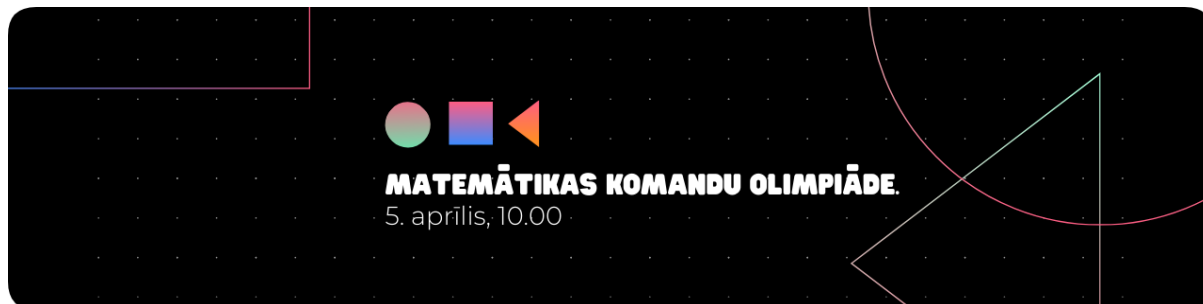




MATEMĀTIKAS KOMANDU OLIMPIĀDE

5. aprīlis, 2025

11. – 12. klašu grupa Uzdevumu komplekts

Risinot olimpiādes uzdevumus, ņem vērā:

- Katrā jautājumā parādi ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājieni.
- Gan tīrrakstā, gan melnrakstā uz katras lapas uzrakstiet komandas nosaukumu un klašu grupu.
- Tīrrakstā iekļaujiet arī atbildes paskaidrojumu/pierādījumu un īsu domu gājieni.
- Uzdevuma nosaukumam un jautājuma numuriem ir jābūt skaidri redzamiem.
- Olimpiādes uzdevumu risināšanai ir atvēlētas 3 stundas un 30 minūtes.
- 30 minūtes pirms olimpiādes beigām viens dalībnieks no katras komandas piedalīsies *Speed math*. Vairāk par to jums pastāstīs brīvprātīgais.
- Ja pamanāt kļūdu uzdevumu komplektā, ziņojiet par to brīvprātīgajam jūsu stāvā.
- Izmantot neatļautas palīgierīces, vai sazināties ar citām komandām ir aizliegts.
- Uzdevumu komplekti netiek vērtēti, tie var palikt pie jums.
- Maksimālais iegūstamo punktu skaits – 63 punkti.
- Atceries, ka:

$\pi \approx 3,14$	$3,15 > \pi > 3,14$	$2025 = 45^2$	$1rad = \frac{180}{\pi} \approx 57.2958^\circ$
--------------------	---------------------	---------------	--

Lai veicas!

IR VAI NAV?

(22 punkti)

Šajā uzdevumā jautājums ir ļoti vienkāršs – vai vienādojumam ir sakne? Cik gan grūti tas varētu būt?

Šajā uzdevumā Jums var noderēt Koši teorēma par vidējo vērtību, kuras īpašs gadījums nosaka:

Ja kādai nepārtrauktai funkcijai (uzdevumā visas funkcijas ir nepārtrauktas) $f(x)$ eksistē tādi skaitļi a un b , kur $f(a) < 0$ un $f(b) > 0$, vai $f(a) > 0$ un $f(b) < 0$, tad intervālā (a, b) eksistē tāds skaitlis c , ka $f(c) = 0$. Piemēram, ja $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $f(0) = 4 > 0$, $f(3) = -2 < 0$, tad intervālā $(0, 3)$ eksistē skaitlis c , kur $f(c) = 0$, kas ir taisnība, jo $f(1) = 0$.

Pieņem, ka visi skaitļi uzdevumā ir reāli. Katrā uzdevumā parādi ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājienu.

1) $\ln(x^2 + 1) = -1$ (1 punkts)

2) $x^7 + 6000x^6 + 2025x^5 + x^2 + 1 = 0$ (1 punkti)

3) $f^{2025}(x) = 0$, $f(x) = 2025\sqrt{x^2 + 2025} - 2026x + 2024$, piezīme $f^{2025}(x) = f(f..(f(x))..)$, 2025 reizes (3 punkti)

4) $x^{2023} + y^{2024} = z^{2025}$, kur x, y un z ir veseli skaitļi $> 10^{2025}$. (3 punkti)

5) $f(x) = f(x + 1)$, kur $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija, un $f(0) = f(2)$ (2 punkti)

6) $ax^2 + bx + c = 0$, kur a, b un c ir reāli skaitļi, kuri apmierina nosacījumu $a + c = \frac{b}{2025}$, un $x \in [-1, 1]$ (2 punkti)

6) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$ (1 punkts)

7) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{3}$ (2 punkti)

8) $\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(2025x) = 2025$ (1 punkti)

9) $a_{2025}\sin(2025x) + b_{2025}\cos(2025x) + \dots + a_1\sin(x) + b_1\cos(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$, kur visi a_i, b_i ir reāli skaitļi visiem i . (6 punkti)

UNLIMITED POWER!

(22 punkti)

Diemžēl, istā dzīvē nav tāda lieta, kā bezgalīgi daudz enerģija, bet var saražot lielus daudzumus. Šis uzdevums ir par pakāpēm un citiem lieliem skaitļiem.

Pieņem, ka visi skaitļi uzdevumā ir reāli. Katrā uzdevumā parādi ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājienu.

n faktoriāls, jeb $n!$ tiek definēts kā visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājums, proti, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.

1) Kāds ir skaitļa 2024^{2025} pēdējais cipars? (1 punkts)

2) Kādi ir skaitļa 2025^{2025} pēdējie divi cipari? (1 punkts)

3) Ir zināms, ka 20252027 ir pirmskaitlis. Vai ir iespējams atrast tādu naturālu skaitli n , ka $n^{2024} + n^{2023} + \dots + 1$ dalās ar 20252027? (3 punkti)

4) Pierādiet, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n , ka ciparu summa skaitlim 2^n ir lielāka par 10^{2025} . (5 punkti)

5) Atrodiet visus n , kur $n^n + 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. (2 punkti)

6) Ir zināms, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n , kur $n^{13} = 258145266804692077858261512663$. Ar ko ir vienāds n ? (3 punkti)

7) Nosaka ciparu, kas jāraksta simbola $*$ vietā, lai vienādība būtu patiesa!
 $35! = 10333147966386144929 * 66651337523200000000$ (2 punkti)

8) Vai ir iespējams, ka $2^n + 3^n = x^2$, kur n un x ir naturāli skaitļi? (2 punkti)

9) $Q(x) = \left\lfloor \frac{x}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{10^{2025}} \right\rfloor$. Ar ko ir vienāds $Q(10^{2025}) - Q(10^{2025} - 1)$?

Piezīme: $[x]$ apzīme "floor" funkciju, kura ir definēta, kā lielākais veselais skaitlis, kas ir mazāks par x , piemēram, $[3.14] = 3$, $[5.99] = 5$. (3 punkti)

OPTIMUS PRIME

(19 punkti)

Optimus Prime cīnījās pret sliktajiem puīšiem, bet jums šajā uzdevumā vajadzēs cīnīties pret ģeometrijas optimizācijas uzdevumiem. Mēs ticam, ka tāpat kā Optimus Prime, arī jūs atrisināsiet šos uzdevumus.

Pieņem, ka visi skaitļi uzdevumā ir reāli. Katrā uzdevumā parādi ne tikai atbildi, bet arī pierādījumu un domu gājieni.

1) Kāds ir minimālais garums līknei (ne obligāti taisnei), kas sadala vienādmalu trijstūrī 2 daļas ar vienādiem laukumiem, ja tās abi gali atrodas dažādām trijstūra malām?

(4 punkti)

2) Zirneklis sēž kuba, ar malu garumu 6cm , virsotnē. Pretējā virsotnē sēž muša. Zirneklis var pārvietoties pa kuba ārpusi. Kāds ir īsākais ceļš no zirnekļa līdz mušai?

(2 punkti)

3) 4 zirnekļi sēž uz dažādām kvadrāta, ar malas garumu 1cm , virsotnēm. Katru stundu viņi izvēlas kādu no pārējiem zirnekļiem un lec punktā, kas ir simetrisks pret šo zirnekli. Vai viņi var kādreiz nonākt kvadrāta virsotnēs, kuram malas garums ir $> 1\text{cm}$? **(2 punkti)**

4) Vienādmalu trijstūrī ABC no punkta A izstarojas gaismas stars, kas atstarojas no BC punktā D . Attiecība $\frac{BD}{DC}$ ir racionāls skaitlis. Pierādiet, ka kādā brīdī gaismas stars nonāks kādā no virsotnēm. **(5 punkti)**

5) Dots trijstūris ar perimetru 2025. Kāds var būt šī trijstūra maksimālais laukums? **(3 punkti)**

6) Vai ir iespējams koordinātu plaksnē uzzīmēt rīņķa līniju ar racionālu radiusu, lai uz tās būtu tieši 2025 racionālie punkti?

Racionālais punkts ir punkts, kuram abas koordinātes ir racionālas. **(3 punkti)**